TD n°1 : Espaces vectoriels

Exercice 1. Sous-espaces vectoriels ?

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - 7y = z\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 - z^2 = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = x + y + z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } z(x^2 + y^2) = 0\}$

Exercice 2. Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3. Sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On note $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1. Soit $r > 0$, on note

$$F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = r\, f(t)\}$$

Montrer que F est un espace vectoriel.

Exercice 4. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, bases et dimension

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = y = z\}$

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x - 2y + z = 0\}$

$G = \{(a - b, a + b, 2a - 3b) \text{ tels que } a, b \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension.
2. Déterminer $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$. S'agit-il d'espaces vectoriels ?
   Si oui, en déterminer une base (si possible) et la dimension.

Exercice 5. Sous-espaces vectoriels, bases et dimension

Dans chacun des cas suivants, prouver que F est un espace vectoriel et en trouver une base et la dimension.

1. F est l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$P(x) = (a + b + c)x^3 + (2a - c)x^2 + b + c \quad \text{où } (a, b, c) \text{ décrit } \mathbb{R}^3$$
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } \forall\, x \in \mathbb{R},\ 3P(x) - xP'(x) + xP''(x) = 0\}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } AM = MA\}$

Exercice 6. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, somme

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (1, 1, 1, 3), \quad v_3 = (2, 1, 1, 1), \quad v_4 = (-1, 0, -1, 2), \quad v_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$, $F + G$.

Exercice 7. Familles libres ou liées de $\mathbb{R}^3$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u_1 = (2, 1, 0) \quad ; \quad u_2 = (-1, 0, 1) \quad ; \quad u_3 = (1, 0, 1) \quad ; \quad u_4 = (1, 2, 3)$$

On considère les familles :

$$(u_1, u_2) \quad ; \quad (u_1, u_2, u_3) \quad ; \quad (u_1, u_2, u_4) \quad ; \quad (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Pour chacune d'elles, dire s'il s'agit d'une famille libre ou liée, d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ou non, d'une base de $\mathbb{R}^3$ ou non.

Exercice 8. Familles libres ou liées de $\mathbb{R}[X]$

1. Les familles (P, Q, R) suivantes sont-elles libres ou liées ?
   (a) $P(x) = (x - 1)(x - 2) \quad ; \quad Q(x) = (x + 1)(x + 2) \quad ; \quad R(x) = (x + 1)(x - 1)$
   (b) $P(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad Q(x) = -x^2 - 1 \quad ; \quad R(x) = 3$
   (c) $P(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad Q(x) = 0 \quad ; \quad R(x) = 7x^3 + 2$
2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par chacune de ces familles ?

Exercice 9. Rang d'une famille de vecteurs

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 2, 1), \quad e_3 = (1, 0, -2, 3), \quad e_4 = (1, 1, 2, -2).$$

1. La famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est-elle libre ?
2. Quel est le rang de la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$?
3. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Exercice 10. Inversion de matrice

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Si A est inversible, déterminer A^{-1}.